Circuitos Eléctricos en Corriente Alterna

3er Parcial: Circuito Magnético

Dr.Irvin López García

Universidad Autónoma Metropolitana
Departamento de Energía

2 de septiembre de 2014

Inductancia mutua y coeficiente de acoplamiento

Inductancia mutua

$\lambda \Rightarrow$ Encadenamiento de flujo magnético.

Para un inductor lineal

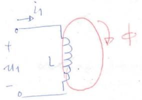
$$\lambda = Li$$

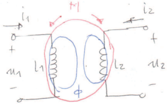
Según la Ley de Faraday

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$L \Rightarrow$ Inductancia [Henrios]

Se llama COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN de la bobina.





Nota: El acoplamiento se incrementa cuando una bobina está arrollada sobre otra (dependiendo de su proximidad física).

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2$$

donde $M \Rightarrow$ Inductancia mutua (coeficiente de inducción mutua [H]).

Inductancia mutua y coeficiente de acoplamiento

Las tensiones entre los terminales son las derivadas del tiempo de los encadenamientos de flujos.

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2}{dt} = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

Dominio de la frecuencia

$$\tilde{V}_1 = j\omega L\tilde{I}_1 + j\omega M\tilde{I}_2$$
$$\tilde{V}_2 = j\omega M\tilde{I}_1 + j\omega L_2\tilde{I}_2$$

Se aplican en estados sinusoidales estacionarios.

Dominio s

$$\mathbf{V}_1 = L_1 s\mathbf{I}_1 + Ms\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = Ms\mathbf{I}_1 + L_2 s\mathbf{I}_2$$

COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO

Una bobina de N espiras con un flujo magnético ϕ atravesando cada espira tiene un encadenamiento de flujo magnético total $\lambda = N\phi$.

Según la Ley de Faraday, la fem (fuerza electromotriz) inducida (tensión (e)) es $e = \frac{d\lambda}{dt} = N\frac{d\phi}{dt}$.

Inductancia mutua y coeficiente de acoplamiento

Autoinducción:

$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d\phi}{dt} \quad \text{o} \quad L = N\frac{d\phi}{di}$$

$\phi \Rightarrow$ flujo magnético [Weber (Wb)]

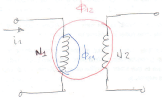
$$\boxed{1\,Wb = 1\,V \cdot s}$$

$$1H = \frac{1\,Wb}{A}$$

Nota:

A lo largo del curso y el libro de texto se supone que ϕ e i son proporcionales.

$$L = N\frac{\phi}{i}, \quad Li = N\phi = \lambda$$



$$e = M\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt}$$

ó

$$M = N_2\frac{d\phi_{12}}{di_1}$$

Como el acoplamiento es bilateral

$$M = N_1\frac{d\phi_{21}}{di_2}$$

Inductancia mutua y coeficiente de acoplamiento

COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO (K)

K, se define como la relación entre el flujo mutuo y el flujo total:

$$K \equiv \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

donde $0 \leq K \leq 1$.

Tomando el producto de (M)(M)

$$\Rightarrow \quad M^2 = \left(N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}\right)\left(N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}\right)$$

$$= \left(N_2 \frac{d(K\phi_1)}{di_1}\right)\left(N_1 \frac{d(K\phi_2)}{di_2}\right)$$

$$= K^2 \left(N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\right)\left(N_2 \frac{d\phi_2}{di_2}\right) = K^2 L_1 L_2$$

de lo cual

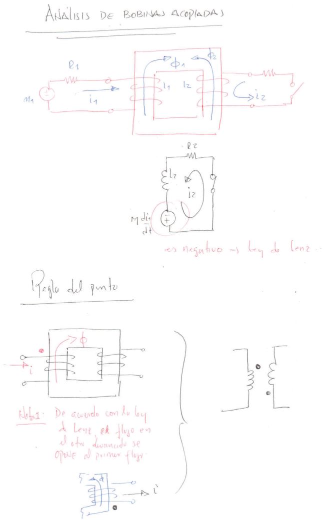
$$M = K\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{o} \quad X_M = K\sqrt{X_1 X_2}$$

Nótese:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

1) si todo el flujo de las bobinas es mutuo, es decir, no hay flujo disperso, entonces $K = 1$

Análisis de bobinas acopladas

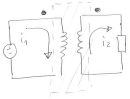


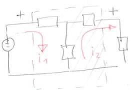
Análisis de bobinas acopladas

La Regla del punto es: Edminister 3ra edición (2

1) cuando las corrientes supuestas entran o salen de un par de bobinas acopladas por los terminales con punto, los signos de los términos ~~de~~ M serán los mismos signos que los términos de L; pero

2) si una de las intensidades entra por un terminal con punto, mientras que la otra sale por un terminal con punto, los signos de los términos de M serán de signo contrario que los signos de los términos con L.





Energía en dos bobinas acopladas

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \ [J]$$

Nota 1: El término $M i_1 i_2$ representa la energía debida al efecto de la inducción mutua.

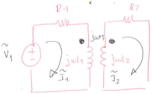
Nota 2: El signo de este término es:

a) $+$ → si ambas corrientes i_1 e i_2 entran a los terminales con punto o a las terminales sin punto

b) $-$ → si una de las intensidades entra a un terminal con punto y la otra a un terminal sin punto.

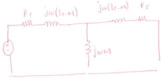
Análisis de bobinas acopladas

CIRCUITOS CONDUCTIVOS EQUIVALENTES ACOPLADOS (3)



$$R_1\tilde{I}_1 + j\omega L_1\tilde{I}_1 - j\omega M\tilde{I}_2 = \tilde{V}_1$$

$$R_2\tilde{I}_2 + j\omega L_2\tilde{I}_2 - j\omega M\tilde{I}_1 = 0$$

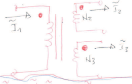


Regla del punto de las amperevueltas !!

$a = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow$ Tarea, demostrar que $\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = a.$

Tarea

$$\boxed{N_1\tilde{I}_1 = N_2\tilde{I}_2}$$

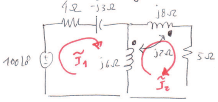


$$\boxed{N_1\tilde{I}_1 - N_2\tilde{I}_2 - N_3\tilde{I}_3 = 0}$$

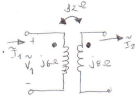
Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

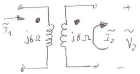
Anotaciones importantes para el tema de circuitos acoplados magnéticamente.

Si se tiene el siguiente circuito:



De manera alternativa, será mejor deducir la tensión mutua redibujando la porción pertinente del circuito para cada rama por ejemplo.





$\tilde{V}_1 = -2j\tilde{I}_2$

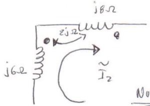
Nota: $\tilde{I}_2$ sale de una terminal con punto e $\tilde{I}_1$ entra por terminal con punto.

$\tilde{V}_2 = -2j\tilde{I}_1$

Nota: $\tilde{I}_1$ entra por terminal con punto, mientras que $\tilde{I}_2$ sale por terminal con punto.

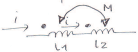
Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

Para el caso de la malla II, se tiene que.



$2(j2)\tilde{I}_2$.

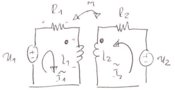
Nota 1: Para el caso de la malla II, se ve que $\tilde{I}_2$ recorre a los dos devanados que están acoplados magnéticamente, por lo tanto, se aplica el resultado siguiente:



$\tilde{V}_{L1} + \tilde{V}_{L2} + 2\tilde{V}_M$

Nota 2: Se puede observar que la tensión es positiva porque la corriente $\tilde{I}_2$ entra en ambas bobinas por terminal sin punto.

Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos



$$-\tilde{V}_1 + \tilde{I}_1 R_1 + jX_1\tilde{I}_1 + jX_M\tilde{I}_2$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_1 = \tilde{I}_1 R_1 + jX_1\tilde{I}_1 + jX_M\tilde{I}_2 \longrightarrow \text{Malla I.}$$

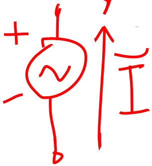
$$= (R_1 + jX_1)\tilde{I}_1 + jX_M\tilde{I}_2$$

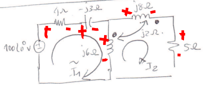
$$-\tilde{V}_2 + \tilde{I}_2 R_2 + jX_2\tilde{I}_2 + jX_M\tilde{I}_1$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_2 = \tilde{I}_2 R_2 + jX_2\tilde{I}_2 + jX_M\tilde{I}_1$$

$$= (R_2 + jX_2)\tilde{I}_2 + jX_M\tilde{I}_1 \longrightarrow \text{Malla II.}$$

$$\frac{1}{j} = -j$$





$$-100\angle 0^\circ + 4\tilde{I}_1 - j3\tilde{I}_1 + j6\tilde{I}_1 - j6\tilde{I}_2 - j2\tilde{I}_2 = 0$$

$$-100 + (4 - j3 + j6)\tilde{I}_1 - (j6 + j2)\tilde{I}_2 = 0$$

$$-100 + (4 + 3j)\tilde{I}_1 - j8\tilde{I}_2 = 0$$

$$100 = (4+3j)\tilde{I}_1 - j8\tilde{I}_2 \longrightarrow \underline{\text{Malla I}}.$$

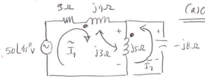
Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

$$\overbrace{5\tilde{I}_2 + j8\tilde{I}_2 + j6\tilde{I}_2 - j6\tilde{I}_1}^{\text{Recorrido de la malla.}} - 2j\tilde{I}_1 + 2(j2\tilde{I}_2) = 0$$

$$(5 + j8 + j6 + 4j)\tilde{I}_2 - (j8)\tilde{I}_1 = 0$$

$$(5 + j18)\tilde{I}_2 - j8\tilde{I}_1 = 0 \Rightarrow \text{Malla II}.$$

Caso I



$$-50\angle 45^\circ + 3\tilde{I}_1 + j4\tilde{I}_1$$ [redacted] $$+ j5\tilde{I}_1 + j5\tilde{I}_2 + 2(j3)\tilde{I}_1 + j3\tilde{I}_2 = 0$$

$$(3 + j4 + j5 + j6)\tilde{I}_1 + (j5 + j3)\tilde{I}_2 = 50\angle 45^\circ$$

$$(3 + j15)\tilde{I}_1 + j8\tilde{I}_2 = 50\angle 45^\circ \longrightarrow \text{Malla I}.$$

Nota 1: La tensión mutua es doble para la bobina 1 y 2, porque circula la misma corriente.

Nota 2: El sentido de la corriente en malla II es contrario a lo que estamos analizando.

$$-j8\tilde{I}_2 + j5\tilde{I}_2 + j5\tilde{I}_1 + j3\tilde{I}_1 = 0$$

$$(j5 - j8)\tilde{I}_2 + (j5 + j3)\tilde{I}_1 = 0$$

$$-3j\tilde{I}_2 + j8\tilde{I}_1 = 0$$

$$j8\tilde{I}_1 - 3j\tilde{I}_2 = 0 \longrightarrow \text{Malla II}$$

Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 50\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 45^\circ & j8 \\ 0 & -j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{150\angle -45^\circ}{109.37\angle -4.72^\circ} = \underline{\underline{1.371\angle -40.28^\circ \text{ A}}}$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j15 & 50\angle 45^\circ \\ j8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{400\angle -45^\circ}{109.37\angle -4.72^\circ} = \underline{\underline{3.65\angle -40.28^\circ}}$$

La tensión entre los extremos de $j5\,\Omega$ es:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{j5} &= \tilde{I}_1 j5 + \tilde{I}_2 j5 + j3\tilde{I}_1 = j5(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) + j3\tilde{I}_1 \\ &= j5(1.371\angle -40.28^\circ + 3.65\angle -40.28^\circ) + j3(1.371\angle -40.28^\circ) \\ &= \underline{\underline{29.218\angle 49.72^\circ \text{ V}}} \end{aligned}$$

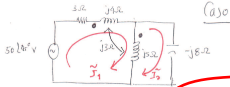
Pero $\tilde{V}_{j5} = \tilde{V}_{-j8}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V}_{-j8} = -\left(\tilde{I}_2(-j8)\right) = -\left((3.65\angle -40.28^\circ)(-j8)\right) = \underline{\underline{29.2\angle 49.72^\circ \text{ V}}}$$

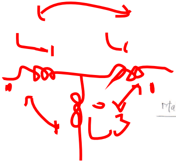
Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

Caso II

4



Malla I

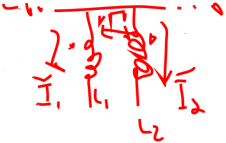


$$\underbrace{-50\angle 45^\circ + \tilde{I}_1 3 + \tilde{I}_1 j4 + \tilde{I}_1 j5}\ \overbrace{+ 2(3j\,\tilde{I}_1) - 3j\tilde{I}_2}^{\text{Voltaje por acoplamiento}}\ \text{[redacted]}\ - j5\tilde{I}_2 = 0$$

$$(3 + j4 + j5 + j6)\tilde{I}_1 - j3\tilde{I}_2\ \text{[redacted]}\ - j5\tilde{I}_2 = 50\angle 45^\circ$$

$\Rightarrow$

$$(3 + j15)\tilde{I}_1 - j8\tilde{I}_2 = 50\angle 45^\circ\,\text{V} \Rightarrow \text{Malla I.}$$



Malla II

$$\tilde{I}_2 j5 - \tilde{I}_2 j8 - \tilde{I}_1 j3\ \text{[redacted]}\ - \tilde{I}_1 j5 = 0$$

$$(j5 - j8)\tilde{I}_2 - (j3 + j5)\tilde{I}_1 = 0$$

$$-j8\tilde{I}_1 - j3\tilde{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-j8\tilde{I}_1 - j3\tilde{I}_2 = 0 \Longrightarrow \text{Malla II}$$

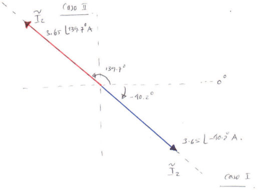
$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 50\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+j15 & -j8 \\ -j8 & -j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{I}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 50\angle 45^\circ & -j3 \\ 0 & -j3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3+j15 & -j8 \\ -j8 & -j3 \end{bmatrix}} = \frac{150\angle -45^\circ}{\text{[redacted]}\ 109.37\angle -4.72^\circ} = \text{[redacted]}\ 1.37\angle -40.27\ \text{A}$$

Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

$$\tilde{I}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 3+j15 & 50\angle 45^\circ \\ -j8 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3+j15 & -j8 \\ -j8 & -j3 \end{bmatrix}} = \frac{400\angle 135^\circ}{109.37\angle -4.72} = 3.65\angle 139.72^\circ\ A$$



Nota: $\tilde{I}_2$ para el caso II es complemento de la corriente $\tilde{I}_2$ del caso I.

La tensión entre los extremos de $j5\,\Omega$ para el caso II es:

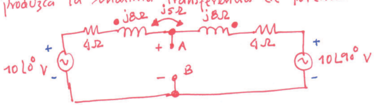
$$\begin{aligned}\tilde{V}_{j5} &= \tilde{I}_1 j5 - \tilde{I}_2 j5 + j3\tilde{I}_1 = j5(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) + j3\tilde{I}_1 \\ &= j5(1.37\angle -40.27^\circ - 3.65\angle 139.72^\circ) + j3(1.37\angle -40.27^\circ) \\ &= 25.099\angle 49.72^\circ + 4.11\angle 49.73^\circ \\ &= \underline{\underline{29.20\angle 49.72^\circ\ V.}}\end{aligned}$$

Pero $\tilde{V}_{j5} = \tilde{V}_{-j8} \Rightarrow$

$$\tilde{V}_{j8} = \tilde{I}_2(-j8) = (3.65\angle 139.72^\circ)(-j8) = \underline{\underline{29.2\angle 49.72^\circ\ V}}$$

Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

Obtener la impedancia entre los puntos A y B que produzca la máxima transferencia de potencia



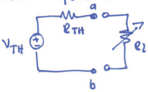
Solución:

Del teorema de máxima potencia, se sabe que

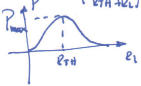
$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} \quad ; \quad R_L = R_{TH}$$

Teorema de Thevenin

Establece que un circuito lineal de dos terminales puede remplazarse por un circuito equivalente que consta de una fuente de tensión V_{TH} en serie con un resistor R_{TH}, donde V_{TH} es la tensión de circuito abierto en las terminales y R_{TH} es la entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes se apagan



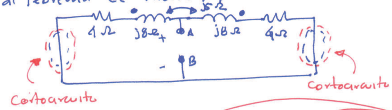
$$P = i^2 R_L = \left(\frac{V_{TH}}{R_{TH}+R_L}\right)^2 R_L$$



Circuitos acoplados magnéticamente: Ejemplos

De acuerdo con el teorema de máxima potencia, la impedancia necesaria será la impedancia de Thevenin (Z_{TH}).

Se planteó el siguiente circuito, de acuerdo al Teorema de Thevenin para encontrar Z_{TH}.



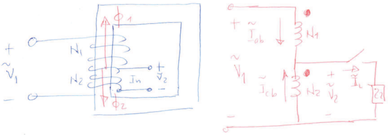
$$Z_{TH} = (4 + j8 + j5) \,//\, 4 + j8 + j5$$

$$\Rightarrow Z_{TH} = (4 + j13) \,//\, (4 + j13)$$

$$\boxed{Z_{TH} = 2 + j6.5}$$

Observación: Desde el V_{TH}, en los inductores j8 la corriente entra por terminal sin punto.

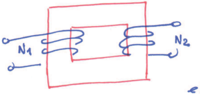
Autotransformador

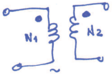


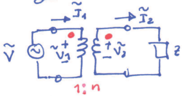
Es un devanado eléctricamente continuo de una o más tomas y un núcleo magnético.

$$\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = a + 1$$

Transformador ideal







Un transformador ideal es un transformador de acoplamiento sin pérdidas en el que las bobinas primarias y secundarias tienen autoinductancias infinitas.

Tiempo:

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi}{dt} \; ; \; v_2(t) = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$v_1(t)\, i_1(t) = v_2(t)\, i_2(t)$$

Frecuencia

$$\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$|\tilde{V}_1|\,|\tilde{I}_1| = |\tilde{V}_2|\,|\tilde{I}_2|$$